

ΑΛΓΕΒΡΑ – τελική εξέταση

(27/01/10)

4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_3 + 4x_4 = 2$$

α) Βρείτε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του παραπάνω συστήματος.

β) Βρείτε και χαρακτηρίστε τη λύση του συστήματος.

(1.5 μονάδα)

Απ.: α)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

β) Το σύστημα παρουσιάζει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-k, 1, -2 + 2k, k).$$

5. Βρείτε μια βάση για το χώρο λύσεων της εξίσωσης $x - y + 2z + w = 0$.

(1 μονάδα)

Απ.: Μια βάση είναι η
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

6. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $T(x, y) = (2x + y, 4y)$.

Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τη βάση $S = \{s_1, s_2\} = \{2e_2, -2e_2\}$, όπου e_1, e_2 τα διανύσματα της standard βάσης του $\mathbb{R}^2$: $E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

(1 μονάδα)

Απ.:
$$A_S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .

β) Βρείτε έναν όμοιο πίνακα του A .

(1.5 μονάδα)

Απ.: α) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ και $u_1 = (-1, -1, 0), u_2 = (1, 4, -2), u_3 = (1, 1, 1)$

β) Είναι ο $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$